

С.В. Игонин

Комбинаторика

Краткий конспект

Саратов 2019

Комбинаторика

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами

Правило суммы: некоторый объект A можно выбрать n способами, а др. объект B можно выбрать m способами, то выбор «либо A , либо B » можно осуществить $n + m$ способами.

Правило произведения: если объект A можно выбрать n – способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от A) m способами, то пары объектов A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Примеры:

1. Выбрать книгу и диск из 10 книг и 12 дисков можно $10 \cdot 12 = 120$ способами.
2. Требуется найти количество слов, составленных не более, чем из 3-х букв алфавита **{a, b, c, d}**.

Количество n -буквенных слов равно количеству размещений из 4-х букв на n мест с повторениями (4^n). Количество всех слов будет складываться из количества одно-, двух-, и трехбуквенных слов

$$4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 84$$

(правило суммы и правило произведений одновременно)

Без повторений

Пусть n – общее количество элементов, причем среди них отсутствуют одинаковые элементы.

1. Перестановка

Необходимо подсчитать количество перестановок для n различных элементов.

$$P_n = n!$$

Для множества **{1, 2, 3}** возможны следующие перестановки без повторений

123	213	231
321	312	132

2. Размещения

Необходимо разместить n элементов по k различным позициям ($k < n$). Количество размещений n по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Из множества **{1, 2, 3}** элементы можно разместить без повторений в две позиции следующим количеством способов $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

12	21	13
31	23	32

3. Сочетания

Сколько существует способов выбрать k предметов из n различных предметов.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Из множества **{1, 2, 3}** можно выбрать два элемента следующим количеством способов $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = 3$

12	13	23
-----------	-----------	-----------

В сочетаниях последовательность не важна (**12** и **21** одно и то же). Главное сам факт выбора.

С повторениями

1. Перестановки

Необходимо подсчитать количество перестановок для n элементов. При этом существует k – типов различных элементов, n_k – количество элементов k -го типа

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Для множества **{a, a, b}** существует следующее количество перестановок

$$\bar{P}_3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

aab aba baa

2. Размещения

Можно выбрать несколько предметов одного вида (пример, числа в позиционных системах счисления, одна и та же цифра может повторяться несколько раз в числе)

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Из множества **{1, 2, 3}** элементы можно разместить с повторениями по двум позициям следующим количеством способов $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$

11	12	13
21	22	23
31	32	33

3. Сочетания

Сколько существует способов выбрать k предметов из n различных предметов. При этом можно выбирать одинаковые предметы.

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Из множества **{1, 2, 3}** два элемента можно выбрать с повторением следующим количеством способов

$$\bar{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

11	22	33
12	13	23