

Глава 1. Системы счисления

Когда-нибудь задумывались: «Как устроены числа?». Записывать числа и совершать операции над числами возможно различными способами. В данной главе рассматриваются основные понятия, необходимые для понимания устройства чисел. Изучаются правила построения чисел, правила перевода чисел из одной формы записи в другую. Подробно разбираются простые операции над числами: сложение и умножение.

1.1 Основные определения

Придумаем собственную систему счисления, приведем строгие научные определения основных понятий и затронем классификацию.

1.1.1 Собственная система

Представим себе далекое прошлое. Ещё дальше.. Ещё..... Живем в пещерах. Ночь, повар спит. Часть племени вернулась из похода, остальные остались ночевать вне лагеря. Как сообщить повару расход на завтрак?

Расход – количество человек, которое будет завтракать.

Будить повара нельзя – будет злой и чего глядишь дубиной замахнется. Первое, что приходит на ум, положить кучу камней равную количеству обитателей пещеры. Хорошо, составим кучу из семьсот пятьдесят двух камней. Повар проснется в четыре утра и до обеда будет перебирать камушки. И племя останется без завтрака и повару не поздоровится.

Следует сделать так, чтобы и люди были сыты и повар цел. Как первобытным существам, должна прийти идея, заранее договориться с поваром, что камушек – это один человек, палочка это десять камушков, а листочек – десять палочек или сто камней *рис. 1а*.

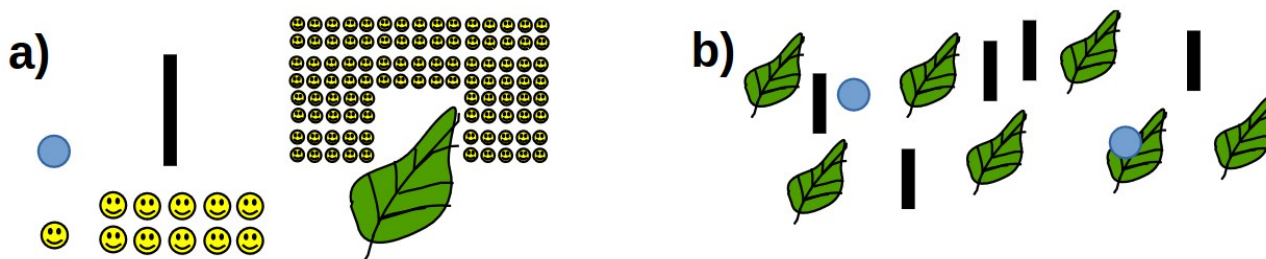


Рисунок 1 — Алфавит первобытной системы счисления (a) и семьсот пятьдесят два человека, записанные с использованием первобытной системы счисления (b)

Теперь семьсот пятьдесят два человека будут выглядеть как семь листочков, пять палочек и два камушка *рис. 1b*. Количество человек останется прежним, если поменять предметы местами.

Таким образом, были придуманы знаки для обозначения количества человек. Полный набор обозначений, для каких-то объектов, называется **алфавитом**. Правила подсчета количества человек по листочкам, палочкам и камушкам называются **системой счисления**. Знаки алфавита называют **цифрами**. У нас три цифры – камушек, палочка, листочек.

Можно придумать и другие обозначения для цифр, да и другие правила. Поэтому дадим более научные определения.

1.1.2 Научные определения

Система счисления – правила записи чисел и операций над ними.

Алфавит системы счисления – символы (цифры), используемые для записи чисел в данной системе счисления.

Основание системы счисления (мощность алфавита) – количество цифр в ее алфавите.

Разберем подробнее первую часть определения системы счисления. Какие правила записи чисел бывают? На самом деле широкое распространение получили два правила.

1.1.3 Непозиционные системы счисления

Системы счисления, в которых порядок (позиция) цифры в записи числа не важен называются непозиционными. Если переставить цифры местами число не изменится. Наша первобытная система счисления является непозиционной. Другой пример, **римская система счисления**.

Но стоп. Числа **IX** и **XI** разные! Мы были слишком грубы, давая определение непозиционным системам счисления.

Непозиционные системы счисления — системы счисления, в которых **вес** цифры не зависит от ее позиции.

Вес цифры — количественное значение, которое цифра привносит в общее значение числа.

Тогда все хорошо. В обоих числах — девять и одиннадцать — у цифры **I** вес равен единице, а у **X** — десяти. Просто римляне (или кто-то другой) ввели дополнительное правило, что если меньшая цифра стоит слева, то она вычитается из большей, а если справа — то прибавляется к ней.

1.1.4 Позиционные системы счисления

Вес цифры зависит от позиции в числе. Люди пользуются позиционными системами счисления. Числа **25** и **52** разные. В первом числе вес двойки равен **двадцати**, а во втором **двум**.

Когда перешли к записи чисел арабскими цифрами (придуманы индийцами), узнаем, почему они выглядят именно так. Не могли же люди просто придумать закорючки. Должна быть какая-то логика в их обозначениях. Это логика очень простая. Цифры хранят количество углов, содержащихся в их записи *рис. 2*. Обратите внимание на ноль. У него нет углов. Хотя на самом деле есть и их бесконечно много.

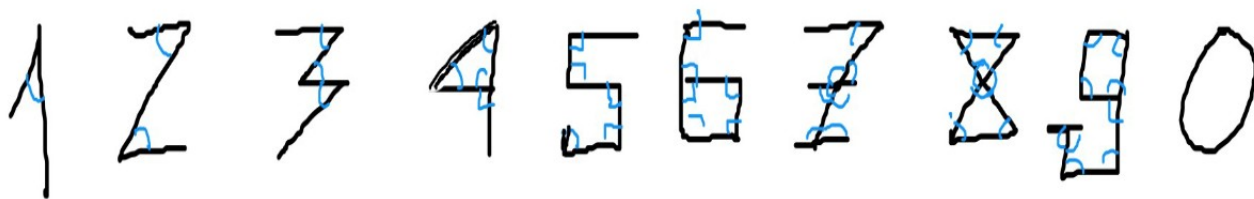


Рисунок 2 — Арабские цифры

В привычном мире используется десять цифр, т.е. имеет **основание** равное **десяти**. Иногда говорят: "**десятичная система счисления**".

Позиция, в которую может быть помещена цифра, называется **разряд**. Известно, что самая правая цифра отсчитывает количество **единиц** в числе, следующая количество **десятков**, **сотен** и т. д. Веса разрядов увеличиваются справа налево и равны **1**, **10**, **100** и т. д. Чтобы узнать количественное значение числа требуется умножить каждую цифру на вес разряда, в котором она находится, и сложить все получившиеся произведения. Такая форма записи называется разложением на множители:

$$\begin{array}{l} \text{цифры: } 7 \quad 5 \quad 2 = 7 \times 100 + 5 \times 10 + 2 \times 1 \\ \text{Вес разряда: } 100 \quad 10 \quad 1 \end{array}$$

Почему веса разрядов в десятичной системе счисления равны именно **1, 10, 100** и т. д.? Это связано с основанием, которое в десятичной системе счисления равно **10**.

Аккуратнее, сейчас знания о числах начнут расширяться. Введем одно хитрое правило, касающееся записи чисел:

Хитрое правило: Вес правого разряда в любой системе счисления равен единице. Вес каждого следующего разряда больше веса предыдущего разряда в **N** раз, где **N** — основание системы счисления, в котором записано число.

В десятичных дробях, под правым разрядом понимается позиция слева от запятой. Разряды правее запятой меньше в **N** раз, таким образом, в десятичной дистеме счисления возникают **десятые, сотые, тысячные и т. д.** доли.

До конца главы под **N** будем понимать основание системы счисления, т. е. количество цифр в алфавите. Разложим число **752** на множители в системе счисления с основанием восемь **N = 8**:

$$\begin{array}{l} \text{цифры: } 7 \quad 5 \quad 2 = 7 \times 64 + 5 \times 8 + 2 \times 1 \\ \text{Вес разряда: } 64 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

Обратите внимание, что разряды в восьмеричной системы счисления отсчитывают не десятки-сотни, а количество единиц (**всегда**), восьмерок (**1 x 8**), шестьдесятчетверок (**8 x 8**) и т. д. Вес предыдущего разряда умножается на основание, т. е. на восемь. Числа **752** и **752** выглядят одинаково, но обозначают разное количество предметов, т. к. они записаны в системах счисления с различным основанием.

В первом случае используется алфавит из **10** цифр **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**, во втором случае из 8-ми цифр **{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**. Индекс в правом нижнем углу числа будет обозначать основание системы счисления, в которой записано число. Подумайте какой число больше: **752₁₀** или **752₈**.

1.2 Развернутая форма числа

Подойдем к разложению на множители немного с другой стороны. Коэффициенты **10**, **100**, **1000** и т. д. получаются путем умножения на **10**. Фактически реализуется операция возведения числа **N = 10** (т. е. основания) в степени с различными показателями:

$$10 = 10^1$$

$$100 = 10^2$$

$$1000 = 10^3$$

То же самое, в системе счисления с основанием **8** ($8 = 8^1$, $64 = 8^2$) и в любой другой другой.

Более того, у **каждого разряда имеется номер**. Разряды нумеруются справа налево, начиная с нуля. Нулевой разряд отсчитывает количество единиц, первый разряд количество сотен и т. д. Теперь разложение на множители будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{номер разряда: } 2 \quad 1 \quad 0 \\ \text{цифры: } 7 \quad 5 \quad 2 \\ \text{вес разряда: } \quad 10 \quad 1 \end{array} 10 = 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 1$$

$$\begin{array}{l} \text{номер разряда: } 2 \quad 1 \quad 0 \\ \text{цифры: } 7 \quad 5 \quad 2 \\ \text{вес разряда: } 64 \quad 8 \quad 1 \end{array} 8 = 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 1$$

Выявим три закономерности:

1. Каждая цифра умножается на основание системы счисления в некоторой степени **n**.
2. Основание возводится в степень **n**, равную номеру разряда, в котором располагается цифра.
3. Правая цифра всегда умножается на **1**.

Известно что любое число в нулевой степени равно **1**, вместо **1** можно записать $1 = 10^0$ и $1 = 8^0$. Тогда зависимость 2 выполняется абсолютно строго.

Запись **752_N** называется **свернутая форма записи числа**, а разложение на множители справа от равно — **развернутая форма записи числа**.

Алгоритм записи развернутой формы числа:

1. Дано число $abcd_N$, где a, b, c, d — цифры числа, N — основание системы счисления, в котором записано число:

$$dbca_N$$

2. Пронумеровать разряды справа налево. Нумерация начинается с нуля:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ dbca_N \end{matrix}$$

3. Выписать первую цифру, умножить её на основание, возведенное в степень, равную номеру разряда:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ dbca_N \end{matrix} = d \times N^3 + \dots$$

4. Прибавить оставшиеся цифры аналогичным образом, умножив их на соответствующий коэффициент N^i :

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ dbca_N \end{matrix} = d \times N^3 + b \times N^2 + c \times N^1 + a \times N^0$$

Коэффициенты $N^i = N^0, N^1, N^2, N^3, \dots, \infty$ составляют **базис системы счисления**. Базис для каждой системы счисления является неизменным набором коэффициентов. Это база или основа. Подставляя к базису различные цифры, можно получить множество чисел. В разобранным примере коэффициенты $N^4, N^5, \dots, \infty$ умножаются на ноль. Нули, записанные слева от числа называют **незначащими нулями** $\dots 000dbca$.

Пример записи развернутой формы числа 752_{10} , в системе счисления с основанием $N = 10$:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 752_{10} \end{matrix} = 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Пример записи развернутой формы числа 752_8 , в системе счисления с основанием $N = 8$:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 752_8 \end{matrix} = 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0$$

Нижний индекс 8 — указывает, что число записано в системе счисления с основанием 8 . Числа $0, 1, 2$ над цифрами, обозначают позицию цифры в числе (номер разряда). Разряды

нумеруются справа налево, начиная с нуля. Обратите внимание, в развернутой форме числа, каждая цифра умножается на основание системы счисления, которое возводится в степень, численно равную разряду цифры. Для удобства основание на схеме изображено зеленым цветом, а разряды – голубым.

1.3 Перевод чисел

Почему мы начали изучение информатики с математической темы: системы счисления. Следующая глава откроет тайну, что любая информация, которая и является объектом изучения информатики, в компьютерах представляется в виде последовательности нулей и единиц. Компьютеры занимают особое место в информатике, т. к. являются основным устройством для хранения, передачи и обработки информации. Научное название компьютера — ЭВМ — электронная вычислительная машина.

Компьютер представляет собой набор микросхем, через которые текут токи (электрические заряды). Технически легко создать и управлять устройством, которое будет понимать только два состояния — тока нет / тока есть. Этим двум состояниям поставили в соответствие две цифры 0 / 1. Таким образом, можно сказать, что компьютер живет в системе счисления с основанием $N = 2$.

Человеку воспринимать информацию в двоичном виде сложно, слишком много 0101010010101110101010. Люди, профессионально работающие с ЭВМ, записывают числа в системе счисления с основанием $N = 16$ (реже 8). Именно, в **16-й**, а не **10-й**, т. к. перевод из **2-й** системы счисления в **16-ю** и обратно осуществляется легко. Далее будет показано, что такой перевод возможно осуществить в уме.

Таким образом, на практике люди используют **2-ю**, **8-ю**, **16-ю** и **10-ю** системы счисления, поэтому важно уметь переводить числа из одной системы счисления в другую. Под переводом понимается изменение формы записи числа, например, число **1111₂** записанное в **2-й** системе счисления в **16-й** обозначается **FF₁₆**, а в **10-й** означает **15₁₀**. Важно усвоить, что числа **1111₂**, **FF₁₆**, **15₁₀** обозначают одно и тоже количество объектов, равное **пятнадцать**, а выглядят по-разному, т. к. записаны в системах счисления с разным основанием.

1.3.1 В десятичную систему счисления

Проще всего узнать, как будет выглядеть экзотическое число, если записать его в **10-й** системе счисления.

Правило перевода числа из любой системы счисления с основанием **N** в систему счисления с основанием **10** (**N** » **10**):

Вычислить развернутую форму числа.

Например, перевод числа 752_8 из **8-й** системы счисления **10-ю** осуществляется следующим образом:

$$752_8 = 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 7 \times 64 + 5 \times 8 + 2 \times 1 = 448 + 40 + 2 = 490_{10}$$

Если в ведро бросить 752_8 камушка, то в ведре окажется четыреста девяносто камней. Интересно, что подобным образом можно перевести число 752_{10} из **10-й** системы счисления в **10-ю**, получится 752_{10} . Так работает разложение на множители, которое получило название **развернутая форма числа**.

1.3.2 Из десятичной системы счисления

У систем счисления существует интересная особенность. Поделим число 490_{10} нацело на **10**. Деление нацело означает, что в результате получится целая часть (частное) и остаток. Дробная часть в данной главе не пригодится:

$$\begin{array}{r|l} 490_{10} & 10 \\ - 490 & 49 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{49} \text{ } 0$$

Внимательный анализ данной схемы, подталкивает на мысль, что в остатке осталась последняя цифра числа 490 , а в частном оказалось число без последней цифры, т. е. **49**. Неужели деления на **10** отсекает последнюю цифру и отправляет ее в остаток. Проверим выдвинутую гипотезу, поделим **49** на **10**:

$$\begin{array}{r} 49_{10} \overline{) 10} \\ \underline{40} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{4} \quad \boxed{9} \end{array}$$

Девять получилось в остатке, а частное равно четырем, работает! Давайте и 4 поделим на 10:

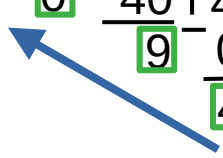
$$\begin{array}{r} 4_{10} \overline{) 10} \\ \underline{0} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{} \quad \boxed{4} \end{array}$$

Даже тут гипотеза верна! Последняя цифра в числе 4 это 4. Она и появляется в остатке. После отсечения последней цифры в числе 4 цифр не остается, частное равно 0.

Итак, деление числа на основание $N = 10$ отбрасывает последнюю цифру от числа, при этом сама последняя цифра появляется в остатке. Обобщим данное правило:

1. Целая часть от деления числа X на основание N равна числу X без последней цифры в системе счисления с основанием N .
2. Остаток от деления числа X на основание N равен последней цифре числа X в системе счисления с основанием N .

Взглянем на более компактную форму записи деления столбиком, которая позволит легко переводить числа из 10-й системы счисления в любую другую:

$$\begin{array}{r} 490_{10} \overline{) 10} \\ \underline{490} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \overline{) 10} \\ \underline{49} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \overline{) 10} \\ \underline{40} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \overline{) 10} \\ \underline{00} \\ 4 \end{array}$$


Сформулируем алгоритм перевода числа из 10-й системы счисления в систему счисления с любым основанием ($10 \gg N$):

Делить число нацело на N . Выписать остатки в обратном порядке.

Переведём число 490_{10} из **10-й** системы счисления в **8-ю**. Если получится 752_8 , значит алгоритм работает:

$$\begin{array}{r|l}
 490_{10} & 8 \\
 \hline
 488 & 61 \\
 \hline
 2 & 56 \\
 & 7 \\
 & 0 \\
 & 7
 \end{array}
 \quad
 490_{10} = 752_8$$

Примечание: часто допускают ошибку и начинают переводить 752_8 в 490_{10} делением на 10. В принципе этот алгоритм сработает, только если вы научитесь делить числа в 8-й системе счисления. Интересный способ, подумайте над этим.

1.3.3 Между любыми системами счисления

Выше было рассмотрена два алгоритма перевода:

$N \gg 10$

$10 \gg N$

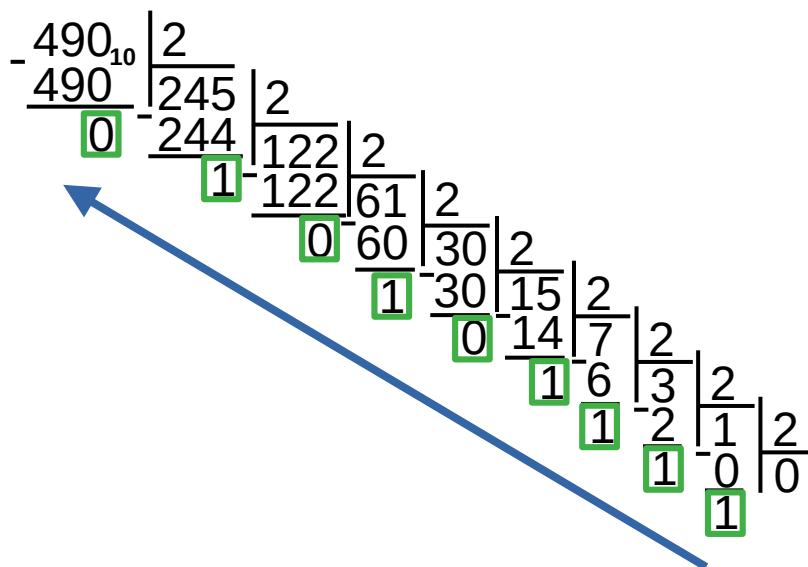
Как осуществить перевод числа системы счисления с основанием X в систему счисления с основанием Y ? Через десятичную систему счисления. Она вступает в качестве мостика, чтобы переправить число с берега X на берег Y .

Переведем число 752_8 из **8-й** в **2-ю** систему счисления. Для совершим два действия $8 \gg 10 \gg 2$.

1. Перевод из восьмеричной в десятичную:

$$\begin{array}{ccc}
 2 & 1 & 0 \\
 7 & 5 & 2
 \end{array}
 8 = 7 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 7 \times 64 + 5 \times 8 + 2 \times 1 = 448 + 40 + 2 = 490{10}$$

2. Получившееся число 490_{10} переведем в двоичную систему счисления:



Результат перевода:

$$752_8 = 490_{10} = 111101010_2$$

Согласитесь, не самый быстрый способ.

1.4 Системы счисления с основанием кратным 2^n

Было отмечено, что на практике при работе с компьютерами и информацией, широко применяются двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Что общего между этими основаниями? Все они являются степенью числа **2**, говорят **кратны 2^n** . Действительно, $2 = 2^1$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$. Перевод между системами счисления с основаниями кратными **2^n** осуществляется легко.

1.4.1 Перевод. Строгое математическое доказательство

Разобьем число **752₈** на три числа, каждое из которых состоит из одной цифры: 7, 5 и 2. Переведем каждое число в двоичную систему счисления. Числа в двоичную систему счисления иногда проще переводить не делением столбиком, а непосредственно через развернутую форму. Для этого будем держать в уме ряд степеней числа 2: {1, 2, 4, 8, 16, ...}. Любое число можно представить суммой чисел из этого ряда. Наша тройка чисел запишется следующим образом:

$$7 = 4 + 2 + 1$$

$$5 = 4 + 1$$

$$2 = 2$$

Перепишем суммы в виде развернутых форм, для этого вместо чисел 1, 2, 4 будем использовать **базис** в виде степенного представления 2^0 , 2^1 , 2^2 . Учтем в развернутой форме три слагаемых, умножив незадействованные элемент базиса на ноль:

$$7 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111_2$$

$$5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101_2$$

$$2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 010_2$$

Запишем развернутую форму числа 752_8 :

$$752_8 = 7 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$$

В получившейся записи числа 2, 5, 7 перепишем в развернутой форме:

$$752_8 = \underbrace{(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)}_7 \cdot 8^2 + \underbrace{(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)}_5 \cdot 8^1 + \underbrace{(0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)}_2 \cdot 8^0$$

Применим формулу $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$. Восьмерки представим как $8 = 2^3$. Получим:

$$8^2 = (2^3)^2 = 2^6$$

$$8^1 = (2^3)^1 = 2^3$$

$$8^0 = (2^3)^0 = 2^0$$

Развернутая форма примет вид:

$$752_8 = \underbrace{(1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)}_7 \cdot 2^6 + \underbrace{(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)}_5 \cdot 2^3 + \underbrace{(0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)}_2 \cdot 2^0$$

Раскроем скобки:

$$752_8 = 1 \cdot 2^2 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 \cdot 2^3 + \\ + 0 \cdot 2^2 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^0 \cdot 2^0$$

Используем формулу $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$:

$$752_8 = 1 \cdot 2^{2+6} + 1 \cdot 2^{1+6} + 1 \cdot 2^{0+6} + 1 \cdot 2^{2+3} + 0 \cdot 2^{1+3} + 1 \cdot 2^{0+3} + 0 \cdot 2^{2+0} + 1 \cdot 2^{1+0} + 0 \cdot 2^{0+0}$$

$$752_8 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Представленная сумма является не чем иным, как развернутой формой числа 752_8 , записанной через основание 2. Итоговый результат:

$$752_8 = 111101010_2$$

Итак, чтобы перевести число из восьмеричной системы счисления в двоичную достаточно просто записать вместо каждой восьмеричной цифры трёхразрядное двоичное число. Существует более красивое и полезно доказательство данного алгоритма.

1.4.2 Сдвиг влево

Вспомним интересную особенность, которая возникала при целочисленном делении (делении нацело) на основание. При этом отбрасывалась последняя цифра. Теперь попробуем умножить на десятичное число 123 на основание 10 , всем известно, что для этого справа необходимо написать ноль:

$$123_{10} \cdot 10 = 1230_{10}$$

Рассмотрим подробнее процесс умножения, запишем и умножим развернутую форму:

$$\begin{aligned} 123_{10} \cdot 10^1 &= (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) \cdot 10^1 = \\ &= 1 \cdot 10^2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \cdot 10^1 = \\ &= 1 \cdot 10^{2+1} + 2 \cdot 10^{1+1} + 3 \cdot 10^{0+1} = \\ &= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 1230_{10} \end{aligned}$$

Умножение на 10 в десятичной системе счисления равносильно прибавлению единицы к показателю каждого элемента базиса $\{10^i\}$. Обратите внимание, был добавлено слагаемое равное нулю в виде $0 \cdot 10^0$. Умножение на основание приводит к добавлению справа пустого разряда, при этом номера всех имеющихся разрядов увеличиваются на единицу. Такое смещение разрядов называется **сдвигом влево** - все цифры числа сдвигаются влево, а справа выдвигается ноль. Тоже самое произойдет и в любой другой системе счисления в том числе и двоичной:

$$\begin{aligned} 111_2 \cdot 2^1 &= (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^1 = \\ &= 1 \cdot 2^2 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \cdot 2^1 = \\ &= 1 \cdot 2^{2+1} + 1 \cdot 2^{1+1} + 1 \cdot 2^{0+1} = \\ &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1110_2 \end{aligned}$$

Добавление нуля справа от двоичного числа равносильно умножению на 2, при этом все разряды сдвигаются влево. Очевидно, если шесть раз умножить на два, то все разряды сдвинутся влево на шесть позиций. Шесть раз умножить на два это 2^6 :

$$111_2 \cdot 2^6 = 111000000_2$$

Загадка перевода из 8-й в 2-ю немного проясняется:

$$700_8 = 111_2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 111_2 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^0 = 111000000_2$$

Просто записываем восьмеричные цифры в двоичном виде. Полученные тройки смещаются в нужные позиции, т. к. элементы базиса 8^n можно представить в виде степени двойки $8^n = 2^{3 \cdot n}$. Доказательство было громоздким, но мы справились. Систематизируем знания, сформулируем простые алгоритмы перевода.

1.4.3 Таблица алфавитов

Составим таблицу алфавитов различных систем счисления, которой удобно пользоваться при переводе чисел между системами счисления с основаниями кратными 2^n .

2я	8я	10я	16я	Двоичный код
0	0	0	0	0000
1	1	1	1	0001
	2	2	2	0010
	3	3	3	0011
	4	4	4	0100
	5	5	5	0101
	6	6	6	0110
	7	7	7	0111
		8	8	1000
		9	9	1001
			A	1010
			B	1011
			C	1100
			D	1101
			E	1110
			F	1111

Обратите внимание, после цифры **9** в шестнадцатеричной системе счисления идет цифра **A**. Числу A_{16} соответствует число 10_{10} . При этом двоичный код $A_{16} = 1010_2$. Последняя цифра $F_{16} = 15_{10} = 1111_2$. Столбец двоичный код заполняется очень легко. Справа в столбик записываются чередующиеся **0** и **1**. Левее в столбик записываются чередующиеся два нуля и две единицы, далее четыре нуля — четыре единицы и т. д., каждый раз умножаем количество нулей и единиц на два. Компьютер — это просто.

1.4.4 Перевод из системы счисления с основанием $N = 2^n$ в двоичную

Использование таблицы двоичных кодов позволяет переводить числа между системами счисления с кратными основаниями в уме. Итак, чтобы перевести число из системы N в двоичную следует:

1. Представить основание N в виде степени двойки $N = 2^n$.
2. Записать вместо каждой цифры n двоичных цифр из таблички. Разумеется, если $n < 4$, берется n цифр справа).

Пример 1: «Перевести число $A5D3_{16}$ в двоичную систему счисления».

1. Основание $N = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$.
2. Вместо цифр **A**, **5**, **D**, **3** выписываем из таблички **4** двоичные цифры:

$$75D3_{16} = \begin{array}{cccc} 0111 & 0101 & 1101 & 0011_2 \\ 7 & 5 & D & 3 \end{array}$$

Обратите внимание, для цифры 3 и 5 нули слева в данном случае **значащие**, их нельзя опускать. Нули сдвигают цифры A и D в нужные позиции. Самый левый ноль у цифры семь можно не писать, т. к. слева цифр уже нет и он ни на что не влияет, т. е. является **незначащим**:

$$75D3_{16} = 1110101111010011_2$$

Пример 2: «Перевести число 752_{16} в двоичную систему счисления».

1. Основание $N = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$.
2. Вместо цифр **7**, **5**, **2** выписываем из таблички **3** двоичные цифры (с правой стороны):

$$752_{16} = \begin{matrix} 111 & 101 & 010 \\ 7 & 5 & 2 \end{matrix} = 111101010_2$$

1.4.5 Перевод из двоичной в систему счисления с основанием $N = 2^n$

Чтобы перевести число из двоичной в систему счисления с основанием N следует:

1. Представить основание N в виде степени двойки $N = 2^n$.
2. Разбить двоичное числа в группы по n цифр. Разбиение в группы производить справа налево. Это важно.
3. Если в последней (левой) группе не хватает цифр, дописать слева незначащие нули.
4. Записать каждую группу одной цифрой в системе счисления N из таблички.

Пример 2: «Перевести число 111010111010011_2 в шестнадцатеричную систему счисления».

1. Основание $N = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$.
2. Разбиваем двоичное число справа налево в группы по 4 цифры:

$$111010111010011_2 = 111 \ 0101 \ 1101 \ 0011$$

3. В левой группе не хватает одной цифры, дописываем незначащий 0:

$$111010111010011_2 = 0111 \ 0101 \ 1101 \ 0011$$

4. Вместо каждой группы записываем **одну** шестнадцатеричную цифру из таблички:

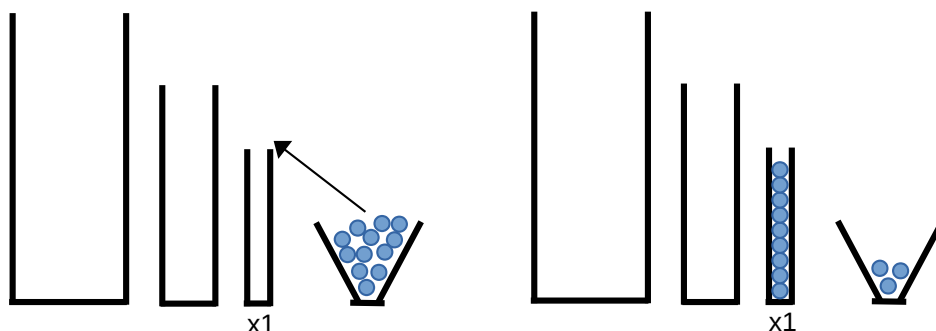
$$\begin{matrix} 0111 & 0101 & 1101 & 0011 \\ 7 & 5 & D & 3 \end{matrix} = 75D3_{16}$$

2.5 Как образуются числа

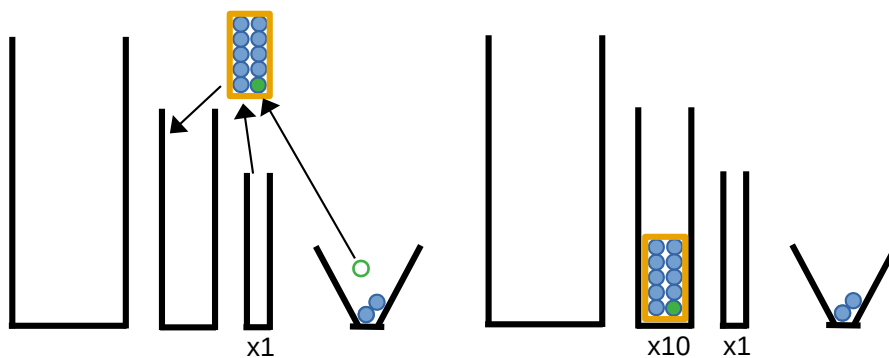
Допустим имеется ведро с двенадцатью камушками. Обозначение данного количества камней в различных системах счисления будет выглядеть по-разному. Это связано с различным количеством цифр в их алфавитах. Представим разряды будущего числа в виде сосудов. Сосудов (разрядов) бесконечное множество. Каждый сосуд (разряд) может хранить определенное количество камней.

2.5.1 Пример в десятичной системе счисления

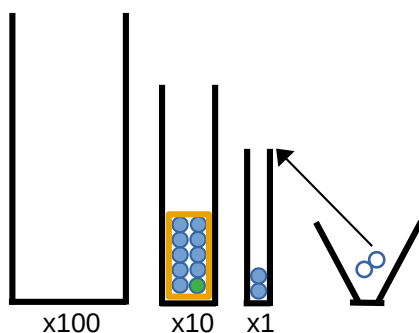
Посмотрим, как записать число 12 в **десятичной** системе счисления. Имеем бесконечное количество пустых сосудов. Первый сосуд (нулевой разряд) максимум может хранить 9 камней, т. к. последняя цифра в **10-й** системе **9**. Будем добавлять по одному камню в первый сосуд, пока он не заполнится полностью (рисунок справа):



При попытке добавить ещё один камень сосуд переполнится, единственный вариант переложить все десять камней в следующий сосуд. Таким образом, второй сосуд хранит группы из десяти камней или **десятки**. При добавлении к девяти единицы получается один десяток. Этот десяток не умещается в первом сосуде и целиком переносится во второй.



Получается один десяток и ноль единиц: $000000000 + 0 = 10_{10}$. Все верно. Продолжаем перемещать по одному камушку из ведра в первый сосуд. Следим за переполнением:



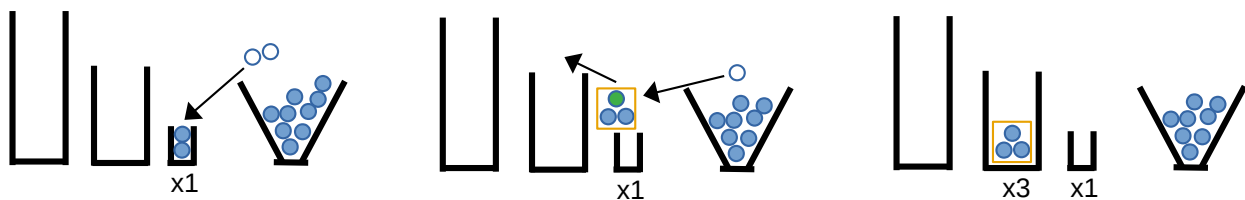
Переполнения нет. Получаем в первом сосуде два камушка и во втором один десяток:

$$10_{10} + 00 = 12_{10}.$$

Важно уяснить, что нельзя перенести часть десятка во второй сосуд. Второй сосуд принимает только целые десятки. И таких десятков во втором сосуде может уместиться **9**, т. е. во втором сосуде максимум может находиться 90_{10} камней, а в первом 9_{10} . Таким образом, максимальное количество в обоих сосудах составляет 99_{10} камней. Добавление одного камня приводит к переполнению первого сосуда. Получившийся десяток переносим во второй сосуд, получаем **10** десятков, которые не умещаются во втором сосуде. Переносим их, т. е. одну сотню, в третий сосуд. Таким образом, третий сосуд хранит целые сотни, и таких сотен в нем уместится не более **9** штук.

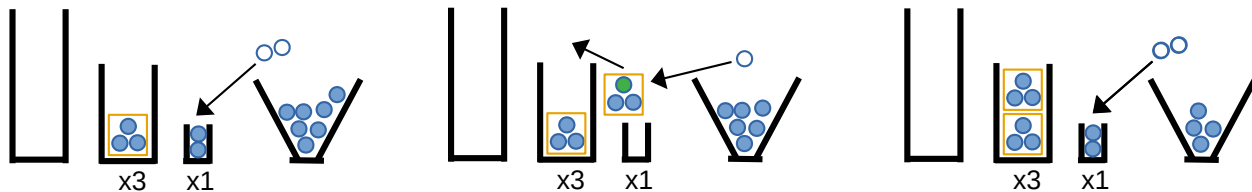
2.5.2 Пример в десятичной системе счисления

Запишем тоже самое число в системе счисления с основанием **3**. В алфавите имеется **3** цифры: $\{0, 1, 2\}$. Следовательно, третий камушек в первом сосуде приведет к переполнению:

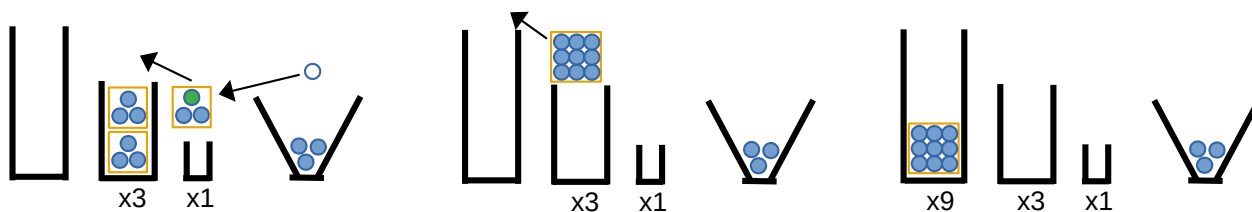


Второй сосуд в **троичной** системе счисления хранит количество троек: одну, две или ни одной. Дальнейшее перекладывание камней вновь приведет к переполнению первого сосуда и переносу тройки камней во второй сосуд. Теперь во втором сосуде уже две тройки, т. е. **6** камушков. Перемести ещё два камня в первый сосуд. Теперь в первом сосуде две единицы

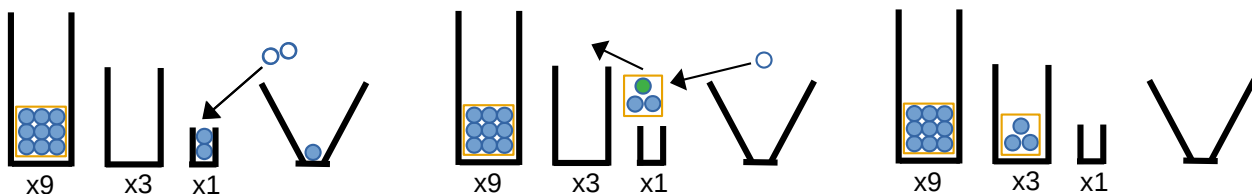
камней, а во втором две тройки камней, всего в двух сосудах **8** камушков. Можете проверить, вычислив развернутую форму, $22_3 = 8_{10}$.



Добавление ещё одного камня приводит к переполнению первого сосуда. Перемещение тройки во второй сосуд приводит и к его переполнению. Придется перенести **9** камней в третий сосуд, который будет хранить количество девяток ($100_3 = 9_{10}$):



Перемещая оставшиеся камни, получим заполненный одной тройкой камней второй сосуд.



Таким образом, двенадцать камней в троичной системе записывается как **110₃**:

$$110_3 = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 9 + 3 = 12_{10}$$

Интересный факт, если число, записанное в системе счисления с основанием **N**, оканчивается нулем, то оно кратно **N** (делится на **N** без остатка). Число 120_{10} делится на **10**, а число 120_3 делится на **3**. Вдумайтесь, число, оканчивающееся нулем, делится на **3**!